

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

З.Ф.ХАНКИШИЕВ
Бакинский Государственный Университет

Исследовано решение одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа методом прямых. Найдено точное решение граничной задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной после применения метода прямых. Установлен принцип максимума для решения последней задачи и доказана сходимость ее решения к решению исходной задачи. Определена скорость сходимости.

Постановка задачи

Пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D}=\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(x, t) + b_1 u(\bar{x}, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

граничным условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где a, b, b_1 - действительные числа, $\bar{x} \in (0, l)$ - фиксированная точка, $f(x, t), \phi(x), \mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ - известные непрерывные функции своих аргументов.

Уравнение (1) есть нагруженное дифференциальное уравнение параболического типа. Следует отметить, что нагруженные дифференциальные уравнения встречаются при изучении многих явлений физики, биологии и т.д. [1].

§1. Применение метода прямых к решению задачи (1)-(3)

Пусть N - фиксированное натуральное число. Разделим отрезок $[0, T]$ оси Ot на N равных частей. Точки деления обозначим через $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, $N\tau = T$. Через эти точки проведем прямые $t = t_n$, $n = 1, 2, \dots, N-1$. Значение функции $V(x, t)$ на этих прямых обозначим через $V_n(x) : V_n(x) = V(x, t_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Рассмотрев уравнение (1) на этих прямых, задаче (1)-(3) можем сопоставить следующую граничную задачу для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} - \sigma^2 y_n(x) = F_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad 0 < x < l, \quad (1.1)$$

$$y_n(0) = \mu_1(t_n), \quad y_n(l) = \mu_2(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

$$y_0(x) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Здесь

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2 \tau} - \frac{b}{a^2} > 0, \quad F_n(x) = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\tau} y_{n-1}(x) + b_1 y_n(\bar{x}) + f_n(x) \right),$$

$n = 1, 2, \dots, N.$

Следует отметить, что задача (1.1)-(1.3) аппроксимирует задачу (1)-(3) с точностью $O(\tau)$, если решение уравнения (1) имеет непрерывную производную по переменной t до второго порядка, включительно.

Очевидно, что общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1) имеет вид

$$y_n(x) = A_n e^{-\sigma x} + B_n e^{\sigma x},$$

где A_n и B_n - произвольные постоянные.

Считая $F_n(x)$ известной функцией, найдем методом вариации постоянных общее решение уравнения (1.1). Для этого, как известно, решение следует искать в виде

$$y_n(x) = A_n(x) e^{-\sigma x} + B_n(x) e^{\sigma x}, \quad (1.4)$$

где $A_n(x)$ и $B_n(x)$ - неизвестные функции.

При этом относительно $A_n'(x)$ и $B_n'(x)$ имеем:

$$\begin{cases} A_n'(x) e^{-\sigma x} + B_n'(x) e^{\sigma x} = 0, \\ -A_n'(x) e^{-\sigma x} + B_n'(x) e^{\sigma x} = \frac{1}{\sigma} \cdot F_n(x). \end{cases}$$

Из этой системы алгебраических уравнений находим:

$$A_n'(x) = -\frac{1}{2\sigma} e^{\sigma x} \cdot F_n(x), \quad B_n'(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\sigma x} \cdot F_n(x).$$

Отсюда, после интегрирования получим:

$$A_n(x) = -\frac{1}{2\sigma} \int_0^x e^{\sigma \xi} \cdot F_n(\xi) d\xi + A_n, \quad B_n(x) = -\frac{1}{2\sigma} \int_x^l e^{-\sigma \xi} \cdot F_n(\xi) d\xi + B_n.$$

Здесь A_n и B_n - произвольные постоянные.

Подставляя эти выражения $A_n(x)$ и $B_n(x)$ в (1.4) имеем:

$$\begin{aligned}
y_n(x) = & A_n e^{-\alpha x} + B_n e^{\alpha x} - \frac{1}{2\sigma} \int_0^x e^{-\sigma(x-\xi)} \cdot F_n(\xi) d\xi - \\
& - \frac{1}{2\sigma} \int_x^l e^{-\sigma(\xi-x)} \cdot F_n(\xi) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Это есть общее решение уравнения (1.1). Потребуя выполнение граничных условий (1.2) для A_n и B_n имеем:

$$\begin{aligned}
A_n = & \frac{1}{2sh\sigma l} \left[\mu_1(t_n) e^{\alpha l} - \mu_2(t_n) + \frac{1}{\sigma} \cdot \int_0^l sh\sigma(l-\xi) \cdot F_n(\xi) d\xi \right], \\
B_n = & \frac{1}{2sh\sigma l} \left[\mu_2(t_n) - e^{-\alpha l} \cdot \mu_1(t_n) + \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\alpha l} \cdot \int_0^l sh\sigma\xi \cdot F_n(\xi) d\xi \right].
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения A_n и B_n в правую часть равенства (1.5) найдем, что

$$\begin{aligned}
y_n(x) = & \frac{sh\sigma(l-x)}{sh\sigma l} \cdot \mu_1(t_n) + \frac{sh\alpha x}{sh\sigma l} \cdot \mu_2(t_n) + \frac{\exp(-\alpha x)}{2\sigma \cdot sh\sigma l} \cdot \\
& \cdot \int_0^l sh\sigma(l-\xi) \cdot F_n(\xi) d\xi + \frac{\exp(-\sigma(l-x))}{2\sigma \cdot sh\sigma l} \cdot \int_0^l sh\sigma\xi \cdot F_n(\xi) d\xi - \frac{1}{2\sigma} \cdot \\
& \cdot \int_0^x \exp(-\sigma(x-\xi)) \cdot F_n(\xi) d\xi - \frac{1}{2\sigma} \cdot \int_x^l \exp(-\sigma(\xi-x)) \cdot F_n(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом выражения $F_n(x)$, после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
y_n(x) = & \frac{sh\sigma(l-x)}{sh\sigma l} \cdot \mu_1(t_n) + \frac{sh\alpha x}{sh\sigma l} \cdot \mu_2(t_n) - \frac{\exp(-\alpha x)}{2a^2\sigma\tau sh\sigma l} \cdot \int_0^l sh\sigma(l-\xi) \cdot \\
& \cdot (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi - \frac{\exp(-\sigma(l-x))}{2a^2\sigma\tau sh\sigma l} \cdot \int_0^l sh\sigma\xi \cdot (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi + \\
& + \frac{1}{2a^2\sigma\tau} \cdot \int_0^x \exp(-\sigma(x-\xi)) (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi + \frac{1}{2a^2\sigma\tau} \cdot \\
& \cdot \int_x^l \exp(-\sigma(\xi-x)) (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi + \frac{b_1}{2a^2\sigma^2} \cdot \left[\left(\frac{1-ch\sigma l}{sh\sigma l} - 1 \right) \cdot \right. \\
& \left. \cdot (\exp(-\alpha x) + \exp(-\sigma(l-x))) + 2 \right] y_n(\bar{x}), \quad n = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Взяв в этом равенстве $x = \bar{x}$, найдем значение $y_n(\bar{x})$:

$$\begin{aligned}
y_n(\bar{x}) = & \left\{ 1 - \frac{b_1}{2a^2\sigma^2} \left[\left(\frac{1 - ch\sigma l}{sh\sigma l} - 1 \right) \cdot (\exp(-\sigma\bar{x}) + \exp(-\sigma(l-\bar{x}))) + 2 \right] \right\}^{-1} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{sh\sigma(l-\bar{x})}{sh\sigma l} \cdot \mu_1(t_n) + \frac{sh\sigma\bar{x}}{sh\sigma l} \cdot \mu_2(t_n) - \frac{\exp(-\sigma\bar{x})}{2a^2\sigma\tau sh\sigma l} \cdot \int_0^l sh\sigma(l-\xi) \cdot \right. \\
& \cdot (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi - \frac{\exp(-\sigma(l-\bar{x}))}{2a^2\sigma\tau sh\sigma l} \cdot \int_0^l sh\sigma\xi \cdot (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi + \\
& + \frac{1}{2a^2\sigma\tau} \cdot \int_0^{\bar{x}} \exp(-\sigma(\bar{x}-\xi)) (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi + \\
& \left. + \frac{1}{2a^2\sigma\tau} \cdot \int_{\bar{x}}^l \exp(-\sigma(\xi-\bar{x})) (y_{n-1}(\xi) + \mathcal{F}_n(\xi)) d\xi \right], n = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Наконец, подставив это выражение $y_n(\bar{x})$ в правую часть равенства (1.6), находим решение задачи (1.1)-(1.3).

Следует отметить, что $y_n(x)$, $n = 1, 2, \dots, N$, надо найти последовательно, начиная с $n = 1$. При $n = 1$ в последних равенствах должно учитываться условие (1.3).

§2. О сходимости метода прямых

Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} - \frac{1}{a^2\tau} y_n(x) + \frac{1}{a^2\tau} y_{n-1}(x) + \frac{b}{a^2} y_n(x) + \frac{b_1}{a^2} y_n(\bar{x}) = -F_n(x),$$

$$0 < x < l, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

$$y_n(0) = \mu_1(t_n), \quad y_n(l) = \mu_2(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$y_0(x) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.3)$$

где

$$F_n(x) = \frac{1}{a^2} f_n(x).$$

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть функции $y_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$, удовлетворяют задаче (2.1)-(2.3). Пусть выполняются условия $F_n(x) \leq 0$ ($F_n(x) \geq 0$), $0 < x < l$, $n = 1, 2, \dots, N$. Если $b_1 > 0$ и $b + b_1 < 0$, то решение $y_n(x)$, отличное от постоянной, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в интервале $(0, l)$ при $n = 1, 2, \dots, N$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $F_n(x) \leq 0$, $0 < x < l$, $n = 1, 2, \dots, N$ и существует точка $x_0 \in (0, l)$, в которой решение задачи (2.1)-(2.3) принимает наибольшее положительное значение при $n = n_0$, $0 < n_0 \leq N$:

$$y_{n_0}(x_0) = \max_{\substack{0 \leq x \leq l \\ 0 \leq n \leq N}} y_n(x) = M > 0.$$

Не уменьшая общности можем считать, что $y_{n_0-1}(x_0) < M$.

Рассмотрев уравнение (2.1) при $n = n_0$ в точке $x = x_0$, при наших предположениях имеем:

$$-F_{n_0}(x_0) = \frac{d^2 y_{n_0}(x_0)}{dx^2} - \frac{1}{a^2 \tau} y_{n_0}(x_0) + \frac{1}{a^2 \tau} y_{n_0-1}(x_0) + \frac{b}{a^2} y_{n_0}(x_0) + \frac{b_1}{a^2} y_{n_0}(\bar{x}) < \frac{1}{a^2} (b + b_1) M < 0.$$

Таким образом, получим, что $F_{n_0}(x_0) > 0$. Это противоречит условию $F_n(x) \leq 0$.

Если предположить, что $x_0 = \bar{x}$, то и в этом случае приходим к противоречию.

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

Теорема 2. Пусть решение задачи (2.1)-(2.3) - функции $y_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$, удовлетворяют условиям

$$y_n(0) \geq 0, y_n(l) \geq 0 \quad (y_n(0) \leq 0, y_n(l) \leq 0), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad y_0(x) \geq 0 \quad (y_0(x) \leq 0), \quad 0 \leq x \leq l. \text{ Если } b_1 > 0, \quad b + b_1 < 0 \text{ и } F_n(x) \geq 0 \quad (F_n(x) \leq 0), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad 0 < x < l, \text{ то } y_n(x) \geq 0, \quad (y_n(x) \leq 0), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Следствие. Однородная система, соответствующая системе (2.1)-(2.3), при нулевых условиях $y_n(0) = 0$, $y_n(l) = 0$ и $y_0(x) = 0$ имеет только тривиальное решение $y_n(x) = 0$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Теорема 3. Пусть $y_n(x)$ - решение задачи (2.1)-(2.3), а $\tilde{y}_n(x)$ - решение задачи, полученной при замене в (2.1)-(2.3) функций $F_n(x)$, $\mu_1(t_n)$, $\mu_2(t_n)$ и $\phi(x)$, соответственно, на $\tilde{F}_n(x)$, $\tilde{\mu}_1(t_n)$, $\tilde{\mu}_2(t_n)$ и $\tilde{\phi}(x)$. Тогда, если выполняются условия

$$|F_n(x)| \leq \tilde{F}_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad 0 < x < l, \quad |\mu_1(t_n)| \leq \tilde{\mu}_1(t_n), \\ |\mu_2(t_n)| \leq \tilde{\mu}_2(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad |\phi(x)| \leq \tilde{\phi}(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

то при $b_1 > 0$ и $b + b_1 < 0$ имеет место неравенство

$$|y_n(x)| \leq \tilde{y}_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Пусть $u(x, t_n)$ - точное решение задачи (1)-(3) на прямой $t = t_n$, $y_n(x)$ - решение задачи (2.1)-(2.3). Введем вспомогательную функцию

$$z_n(x) = y_n(x) - u(x, t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Для этой функции получим:

$$\frac{d^2 z_n}{dx^2} - \frac{1}{a^2 \tau} z_n(x) + \frac{1}{a^2 \tau} z_{n-1}(x) + \frac{b}{a^2} z_n(x) + \frac{b_1}{a^2} z_n(\bar{x}) = -\frac{\tau}{2a^2} \frac{\partial^2 u(x, \bar{t}_n)}{\partial t^2},$$

$$t_{n-1} < \bar{t}_n < t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

$$z_n(0) = 0, \quad z_n(l) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

$$z_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.6)$$

Пусть

$$\tilde{z}_n(x) = \tau M (e^{\xi l} - e^{\xi x}), \quad (2.7)$$

где

$$M = \sup_D \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \quad \xi > 0 \text{ - постоянная.}$$

Для $\tilde{z}_n(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{z}_n}{dx^2} - \frac{1}{a^2 \tau} \tilde{z}_n(x) + \frac{1}{a^2 \tau} \tilde{z}_{n-1}(x) + \frac{b}{a^2} \tilde{z}_n(x) - \frac{b}{a^2} \tilde{z}_n(\bar{x}) &= -\tau M \xi^2 \cdot e^{\xi x} + \\ + \frac{\tau M}{a^2} (b + b_1) e^{\xi l} - \frac{b}{a^2} \tau M e^{\xi x} - \frac{b_1}{a^2} \tau M e^{\xi \bar{x}} &< -\tau M \left(\xi^2 + \frac{b}{a^2} \right) e^{\xi x}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Определим ξ из условия $\xi^2 + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{2a^2}$. Для этого достаточно потребо-

вать выполнения неравенства $\xi \geq \sqrt{(1-2b)/(2a^2)}$. Тогда в силу неравенства (2.8) получим

$$\frac{d^2 \tilde{z}_n}{dx^2} - \frac{1}{a^2 \tau} \tilde{z}_n(x) + \frac{1}{a^2 \tau} \tilde{z}_{n-1}(x) + \frac{b}{a^2} \tilde{z}_n(x) + \frac{b_1}{a^2} \tilde{z}_n(\bar{x}) < -\frac{\tau}{2a^2} M. \quad (2.9)$$

С другой стороны имеем

$$\tilde{z}_n(0) = \tau M (e^{\xi l} - 1) > 0, \quad \tilde{z}_n(l) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.10)$$

$$\tilde{z}_0(x) = \tau M (e^{\xi l} - e^{\xi x}) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.11)$$

Сравнивая (2.4)-(2.6) с (2.9)-(2.11), в силу теоремы сравнения получим справедливость неравенства $|z_n(x)| \leq \tilde{z}_n(x)$ или

$$|y_n(x) - u(x, t_n)| \leq \tau M (e^{\xi l} - e^{\xi x}), \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (2.12)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $b_1 > 0$ и $b + b_1 < 0$. Тогда при $\tau \rightarrow 0$ решение задачи (1.1)-(1.3) сходится к решению задачи (1)-(3). При этом имеет место неравенство

(2.12), где $M = \sup_D \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|$, а ξ определяется из неравенства $\xi \geq \sqrt{(1-2b)/(2a^2)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва: «Высшая школа», 1995, 301 с.
2. Ханкишиев З.Ф. О сходимости метода прямых при решении уравнений эллиптического типа с вырождением. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978,18, № 1, стр. 126-138.

DÜZ XƏTLƏR ÜSULUNUN XƏTTİ PARABOLİK TİP YÜKLƏNMİŞ DİFERENSIAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ TƏTBİQİ

Z.F.XANKIŞIYEV

XÜLASƏ

Xətti parabolik tip yüklənmiş diferensial tənlik üçün bir məsələ düz xətlər üsulu ilə tədqiq edilib. Düz xətlər üsulunun tətbiqi nəticəsində adi diferensial tənliklər sistemi üçün alınmış sərhəd məsələsinin dəqiq həlli tapılıb. Bu məsələnin həlli üçün maksimum prinsipinin doğruluğu və onun həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması isbat edilib. Eyni zamanda yığılma sürəti təyin edilib.

APPLICATION OF THE METHOD OF LINES TO THE SOLUTION OF A PROBLEM FOR PARABOLIC LINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATION

Z.F.KHANKISHIYEV

SUMMARY

Here we investigate the solution of a problem for a parabolic loaded linear differential equation by the method of lines. An exact solution is found for the boundary value problem for the system of linear ordinary differential equations, which is obtained after applying the method of lines. To solve the latter problem we establish the maximum principle and prove the convergence of its solution to that of the initial problem. The rate of convergence is determined.